第36卷 第2期 延安大学学报(自然科学版) Vol. 36 No. 2
2017年6月 Journal of Yanan University(Natural Science Edition) Jun. 2017

DOI: 10.13876/J.cnki.ydnse.2017.02.014

关于 Smarandache 函数与除数函数的均值问题

郑 璐,高 丽

(延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘 要: 利用初等和解析方法,研究了 Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 与 Smarandache 函数 $S(n)$ 以及除数函数 $\delta_\alpha(n)$ 的混合函数 $\delta_\alpha(n)(SL(n)-S(n))^2$ 的均值问题,并得到一个较强的渐近公式。

关键词: SmarandacheLCM 函数; Smarandache 函数; 除数函数; 均值

中图分类号: O156.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1004-602X(2017)02-0014-04

1 引言及结论

对于任意正整数 n,著名的 Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 定义为最小的正整数 k 使得 $n\mid[1,2,\cdots,k]$,其中 $[1,2,\cdots,k]$ 表示 $1,2,\cdots,k$ 的最小公倍数。由其定义可得:若 $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准分解式,则

$$SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}\}。$$

这一函数的相关研究很多,许多学者进行了研究且取得很好的结果[1-10]。

对于任意正整数 n,Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n\mid m!$,即 $S(n)=\min\{m: m\in\mathbf{N}, n\mid m!\}$。这一函数也有许多研究成果[6,11-14]。

本文主要利用初等和解析方法,研究了 Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 与 Smarandache 函数 $S(n)$ 以及除数函数 $\delta_\alpha(n)$ 的混合函数 $\delta_\alpha(n)(SL(n)-S(n))^2$ 的均值问题,并得到一个较强的渐近公式。即证明了:

定理 对任意的实数或复数 α 和实数 $x\geqslant3$,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\delta_\alpha(n)(SL(n)-S(n))^2=\frac{2\zeta\left(\alpha+\frac{5}{2}\right)\zeta\left(\frac{5}{2}\right)x^{\alpha+\frac{5}{2}}}{(2\alpha+5)\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^{\alpha+\frac{5}{2}}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\alpha+\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $\zeta(n)$ 为 Riemann zeta-函数,$c_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

2 相关引理

引理1[13] 若 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$,根据初等数论的方法易知

$$\delta_\alpha(n)=n^{\alpha+\varepsilon},$$

其中 ε 为任意给定的正整数。

引理2[15] 设 $x\geqslant2$ 为实数,则有 $\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1=\sum_{i=1}^{k}\frac{a_ix}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)$,其中 $a_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数且 $a_1=1$。

引理3 设 p 为素数,m 为正整数,当 $m\leqslant\sqrt{x}$ 时,则有渐近公式

收稿日期: 2017-04-11
基金项目: 陕西省科技厅科学技术研究发展计划项目(2013JQ1019);延安大学校级科研计划项目—引导项目(YD2014-05)
作者简介: 郑 璐(1995—),男,陕西咸阳人,延安大学硕士研究生。

$$\sum_{p\leqslant\sqrt{\frac{x}{m}}}p^{2\alpha+4}=\frac{2x^{\alpha+\frac{5}{2}}}{(2\alpha+5)m^{\alpha+\frac{5}{2}}(\ln x-\ln m)}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot x^{\alpha+\frac{5}{2}}\cdot\ln^i m}{m^{\alpha+\frac{5}{2}}\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\alpha+\frac{5}{2}}}{m^{\alpha+\frac{5}{2}}\ln^{k+1}\sqrt{\frac{x}{m}}}\right),$$

其中 $b_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

证明：由 Abel 恒等式[16]及引理 2 可得

$$\sum_{p\leqslant\sqrt{\frac{x}{m}}}p^{2\alpha+4}=\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)^{2\alpha+4}\cdot\pi\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)-(2\alpha+4)\int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{\frac{x}{m}}}t^{2\alpha+3}\cdot\pi(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)^{2\alpha+4}\cdot\left[\frac{\sqrt{\frac{x}{m}}}{\ln\sqrt{\frac{x}{m}}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot\sqrt{\frac{x}{m}}}{\ln^i\sqrt{\frac{x}{m}}}+O\left(\frac{\sqrt{\frac{x}{m}}}{\ln^{k+1}\sqrt{\frac{x}{m}}}\right)\right]-$$

$$(2\alpha+4)\int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{\frac{x}{m}}}\left(\frac{t^{2\alpha+4}}{\ln t}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot t^{2\alpha+4}}{\ln^i t}+O\left(\frac{t^{2\alpha+4}}{\ln^{k+1}t}\right)\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)^{2\alpha+5}}{\ln\sqrt{\frac{x}{m}}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)^{2\alpha+5}}{\ln^i\sqrt{\frac{x}{m}}}+O\left(\frac{\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)^{2\alpha+5}}{\ln^{k+1}\sqrt{\frac{x}{m}}}\right)$$

$$-\left[\frac{2\alpha+4}{2\alpha+5}\cdot\frac{\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)^{2\alpha+5}}{\ln\sqrt{\frac{x}{m}}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)^{2\alpha+5}}{\ln^i\sqrt{\frac{x}{m}}}+O\left(\frac{\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)^{2\alpha+5}}{\ln^{k+1}\sqrt{\frac{x}{m}}}\right)\right]$$

$$=\frac{2x^{\alpha+\frac{5}{2}}}{(2\alpha+5)m^{\alpha+\frac{5}{2}}(\ln x-\ln m)}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i x^{\alpha+\frac{5}{2}}\ln^i m}{m^{\alpha+\frac{5}{2}}\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\alpha+\frac{5}{2}}}{m^{\alpha+\frac{5}{2}}\ln^{k+1}\sqrt{\frac{x}{m}}}\right),$$

其中 $b_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

引理 4　设 p 为素数，则有渐近公式

$$\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\sum_{p\leqslant\sqrt{\frac{x}{m}}}\delta_\alpha(mp^2)p^4=\frac{2\zeta\left(\alpha+\frac{5}{2}\right)\zeta\frac{5}{2}x^{\alpha+\frac{5}{2}}}{(2\alpha+5)\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^{\alpha+\frac{5}{2}}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\alpha+\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $c_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

证明：$\because\ \delta_\alpha(mp^2)=\delta_\alpha(m)\delta_\alpha(p^2)$

$=\delta_\alpha(m)(1+p^\alpha+p^{2\alpha})$，

$\therefore\ \delta_\alpha(mp^2)p^4=\delta_\alpha(m)(p^{2\alpha+4}+p^{\alpha+4}+p^4)$

$=\delta_\alpha(m)(p^{2\alpha+4}+O(p^{\alpha+4}))$。

结合引理 3 可得

$$\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\sum_{p\leqslant\sqrt{\frac{x}{m}}}\delta_\alpha(mp^2)p^4$$

$$=\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\sum_{p\leqslant\sqrt{\frac{x}{m}}}\delta_\alpha(m)(p^{2\alpha+4}+O(p^{\alpha+4}))$$

$$=\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\delta_\alpha(m)\sum_{p\leqslant\sqrt{\frac{x}{m}}}p^{2\alpha+4}+O\left(\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\delta_\alpha(m)\sum_{p\leqslant\sqrt{\frac{x}{m}}}p^{\alpha+4}\right)$$

$$=\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\delta_\alpha(m)\left(\frac{2x^{\alpha+\frac{5}{2}}}{(2\alpha+5)m^{\alpha+\frac{5}{2}}(\ln x-\ln m)}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot x^{\alpha+\frac{5}{2}}\cdot\ln^i m}{m^{\alpha+\frac{5}{2}}\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\alpha+\frac{5}{2}}}{m^{\alpha+\frac{5}{2}}\ln^{k+1}\sqrt{\frac{x}{m}}}\right)\right)+O\left(\frac{x^{\alpha+\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)$$

$$=\frac{2x^{\alpha+\frac{5}{2}}}{2\alpha+5}\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\frac{\delta_\alpha(m)}{m^{\alpha+\frac{5}{2}}(\ln x-\ln m)}+\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\delta_\alpha(m)\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot x^{\alpha+\frac{5}{2}}\cdot\ln^i m}{m^{\alpha+\frac{5}{2}}\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\alpha+\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)$$

$$=\frac{2\zeta\left(\alpha+\frac{5}{2}\right)\zeta\frac{5}{2}x^{\alpha+\frac{5}{2}}}{(2\alpha+5)\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^{\alpha+\frac{5}{2}}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\alpha+\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $c_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

3 定理的证明

在和式 $\sum_{n\leqslant x}\delta_\alpha(n)(SL(n)-S(n))^2$ 中，将区间 [1,x] 中所有正整数 n 分为 2 个集合，其中

$A=\{n:SL(n)=p^2\}$;

$B=\{n:SL(n)=p^\alpha,\alpha=1$ 或 $\alpha\geqslant3\}$。

若 $n\in A$ 且 $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$，则 $n=p^2m,p\nmid m$，$p_i^{\alpha_i}\leqslant p^2,i=1,2,\cdots,s$。记 $S(p_i^{\alpha_i})\leqslant\alpha_ip_i$ 且 $\alpha_i\leqslant\ln n$，由 $SL(n)$ 与 $S(n)$ 的定义可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}\delta_\alpha(n)(SL(n)-S(n))^2\\
&=\sum_{\substack{mp^2\leqslant x\\ SL(m)<p^2}}\delta_\alpha(mp^2)(p^2-S(mp^2))^2\\
&=\sum_{\substack{mp^2\leqslant x\\ SL(m)<p^2}}\delta_\alpha(mp^2)(p^4-2p^2S(mp^2)+S^2(mp^2))\\
&=\sum_{\substack{mp^2\leqslant x\\ SL(m)<p^2}}\delta_\alpha(mp^2)p^4\\
&+O\left(\sum_{mp^2\leqslant x}\delta_\alpha(mp^2)\cdot p^2\cdot p\cdot\ln x\right)\\
&+O\left(\sum_{mp^2\leqslant x}\delta_\alpha(mp^2)\cdot p^2\cdot\ln^2x\right)\\
&=\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\sum_{m<p^2\leqslant\frac{x}{m}}\delta_\alpha(mp^2)p^4\\
&+O\left(\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\sum_{m<p^2\leqslant\frac{x}{m}}\delta_\alpha(mp^2)p^4\right)+O(x^{\alpha+2+\varepsilon})\\
&=\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\sum_{p\leqslant\frac{x}{m}}\delta_\alpha(mp^2)p^4+O(x^{\alpha+2+\varepsilon}) \qquad (1)
\end{aligned}$$

由引理 4 可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}\delta_\alpha(n)(SL(n)-S(n))^2\\
&=\frac{2\zeta\left(\alpha+\frac{5}{2}\right)\zeta\left(\frac{5}{2}\right)x^{\alpha+\frac{5}{2}}}{(2\alpha+5)\ln x}\\
&+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^{\alpha+\frac{5}{2}}}{\ln^ix}+O\left(\frac{x^{\alpha+\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)+O(x^{\alpha+2+\varepsilon}),\\
&=\frac{2\zeta\left(\alpha+\frac{5}{2}\right)\zeta\left(\frac{5}{2}\right)x^{\alpha+\frac{5}{2}}}{(2\alpha+5)\ln x}\\
&+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^{\alpha+\frac{5}{2}}}{\ln^ix}+O\left(\frac{x^{\alpha+\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right) \qquad (2)
\end{aligned}$$

其中 $c_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

对 $\forall n\in B$，若 $SL(n)=p$，则 $S(n)=p$，因而 $\delta_\alpha(n)(SL(n)-S(n))^2=0$；若 $SL(n)=p^\alpha,\alpha\geqslant3$，则 $\delta_\alpha(n)(SL(n)-S(n))^2=\delta_\alpha(n)(p^\alpha-S(n))^2\leqslant\delta_\alpha(n)(p^{2\alpha}+\alpha^2p^2)$，且 $\alpha\leqslant\ln n$，所以有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}\delta_\alpha(n)(SL(n)-S(n))^2\\
&\leqslant\sum_{\substack{np^\alpha\leqslant x\\ \alpha\geqslant3}}\delta_\alpha(np^\alpha)(p^{2\alpha}+p^2\ln^2n)=x^{\alpha+2} \qquad (3)
\end{aligned}$$

结合(1),(2),(3)可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\leqslant x}\delta_\alpha(n)(SL(n)-S(n))^2\\
&=\frac{2\zeta\left(\alpha+\frac{5}{2}\right)\zeta\left(\frac{5}{2}\right)x^{\alpha+\frac{5}{2}}}{(2\alpha+5)\ln x}\\
&+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^{\alpha+\frac{5}{2}}}{\ln^ix}+O\left(\frac{x^{\alpha+\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),
\end{aligned}$$

其中 $c_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

参考文献:

[1] Murthy A. Some notions on least common multiples [J]. Smarandache Notions Journal, 2001(12): 307-309.

[2] Lv Z T. On the F. Smarandache LCM function and its mean value [J]. Scientia Magna, 2007, 3(1): 22-25.

[3] Le M H. An equation concerning the Smarandache LCM function [J]. Smarandache Notions Journal, 2004(14): 186-188.

[4] 赵琴，高丽，谢瑞. 两个数论函数的混合均值[J]. 甘肃科学学报，2011, 23(4): 12-14.

[5] Xue Y R. On the F. Smarandache LCM function SL(n) [J]. Scientia Magna, 2007, 3(4): 69-73.

[6] Ge Jian. Mean value of F. Smarandache LCM function [J]. Scientia Magna, 2007, 3(2): 109-112.

[7] Chen J B. Value distribution of the F. Smarandache LCM function [J]. Scientia Magna, 2007, 3(2): 15-18.

[8] 吕国亮. 关于 F. Smarandache LCM 函数与除数函数的一个混合均值[J]. 纯粹数学与应用数学，2007, 23(3): 101-105.

[9] 付静，刘华. 关于 F. Smarandache LCM 函数与除数函数的混合均值[J]. 内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版)，2010, 39(6): 560-562.

[10] 赵院娥. 关于 Smarandache LCM 函数的一类均方差问题[J]. 纯粹数学与应用数学，2008, 24(1): 71-74.

[11] Wang Y X. On the Smarandache function [C] // Zhang Wenpeng, Li Junzhuang, Liu Duansen. Research on Smarandache Problem in Number Theory II. Hexis: Phoenix,

AZ 2005.
[12] 徐哲峰. Smarandache 函数的值分布性质[J]. 数学学报(中文版),2006,49(5):1009-1012.
[13] 董小茹. 关于 Smarandache 函数的均值与方程[D]. 西安:西北大学,2014.
[14] 杨存典,李超,刘瑞森. Smarandache 函数的几个性质[J]. 甘肃科学学报,2010,22(1):24-25.
[15] 潘承洞,潘承彪. 素数定理的初等证明[M]. 上海:上海科学技术出版社,1988.
[16] Apostol T M. Introduction to analytic number theory[M]. New York: Spring-Verlag,1976.

[责任编辑 毕 伟]

On the Mean Value of the Smarandache Function and the Divisor Function

ZHENG LU,GAO LI

(College of Mathematics and Computer Science,Yan´an University,Yan´an 716000,China)

Abstract: The elementary and analytic method were performed to study the Smarandache LCM function $SL(n)$ and Smarandache function $S(n)$ and the mean value problem of $\delta_\alpha(n)(SL(n)-S(n))^2$ and a sharper asymptotic formula was proposed.

Key words: Smarandache LCM function; Smarandache function; divisor function; mean value

(上接第10页)

A Statistical Analysis on Series Connection System with Rayleigh Distribution Components

LV JIA

(College of Mathematics and Computer Science,Yan´an University,Yan´an 716000,China)

Abstract: Through cascading the two independent components whose life obeys Rayleigh distribution,we give the definition of series life distribution using the method of minimal value distribution. For density function of the distribution,the properties were discussed,and the image was presented with the Matlab software.

Key words: serial system; Rayleigh distribution; two components

(上接第13页)

The Matrix Construction Method of the Conjunction Magic Square Matrix

HE Min-mei,LIU Xing-xiang

(College of Mathematics and Computer Science,Yan´an University,Yan´an 716000,China)

Abstract: Using the basic concept of the matrix and the magic square matrix,we combined both of them to construct the conjunction magic square matrix and the beginning of the magic square matrix by the method of matrix($n=2k+1$). The prove of them were provided.

Key words: the magic square matrix; the conjunction magic square matrix; matrix; construction method